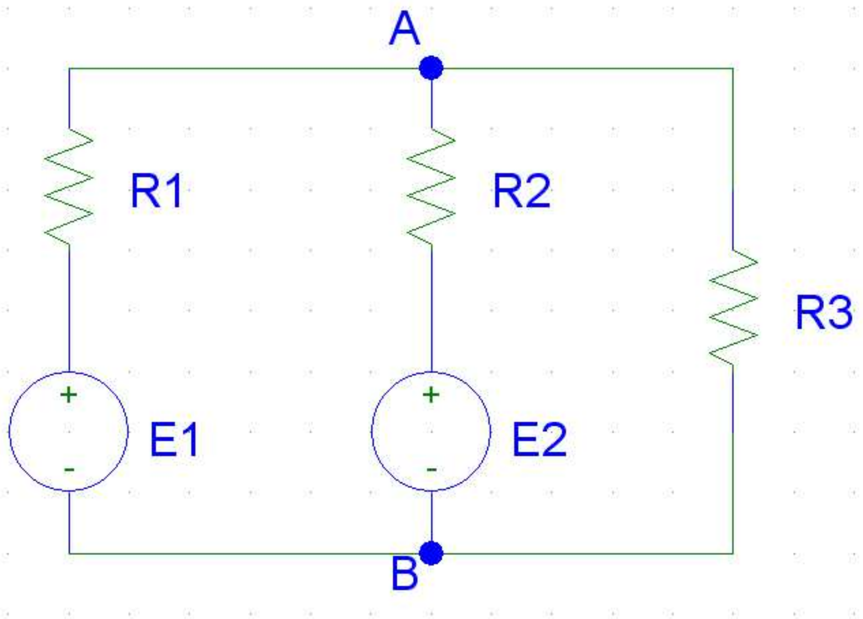
PRINCIPI DI KIRCHHOFF

ESERCIZIO 1
Determinare le correnti che circolano nei tre rami utilizzando i principi di Kirchhoff. Assumere come versi arbitrari per le tre correnti il verso da B verso A.



$$E_1 = 12V \quad E_2 = 20V \quad R_1 = 4\Omega \quad R_2 = 2\Omega \quad R_3 = 2\Omega$$

Occorre scrivere due equazioni di maglia e una equazione di nodo:

$$\begin{cases} E_1 - R_1 \cdot I_1 - E_2 + R_2 \cdot I_2 = 0 \\ E_1 - R_1 \cdot I_1 + R_3 \cdot I_3 = 0 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE ANALITICA

Ricavo il valore di I_2 dalla prima equazione e il valore di I_3 dalla seconda in funzione di I_1

$$\begin{cases} R_2 \cdot I_2 = -E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_2 \\ R_3 \cdot I_3 = -E_1 + R_1 \cdot I_1 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_2 = \dfrac{-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_2}{R_2} \\ I_3 = \dfrac{-E_1 + R_1 \cdot I_1}{R_3} \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni trovate nella terza si ottiene un'equazione nella sola variabile I_1

$$\begin{cases} I_2 = \dfrac{-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_2}{R_2} \\ I_3 = \dfrac{-E_1 + R_1 \cdot I_1}{R_3} \\ I_1 + \dfrac{-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_2}{R_2} + \dfrac{-E_1 + R_1 \cdot I_1}{R_3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_2 = \dfrac{-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_2}{R_2} \\ I_3 = \dfrac{-E_1 + R_1 \cdot I_1}{R_3} \\ \dfrac{I_1 \cdot R_2 \cdot R_3 + \left(-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_2\right) \cdot R_3 + \left(-E_1 + R_1 \cdot I_1\right) \cdot R_2}{R_2 \cdot R_3} = 0 \end{cases}$$

Occorre ora ricercare il valore di I_1, risolvendo l'equazione.

$$I_1 \cdot R_2 \cdot R_3 + \left(-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_2\right) \cdot R_3 + \left(-E_1 + R_1 \cdot I_1\right) \cdot R_2 = 0$$

$$I_1 \cdot R_2 \cdot R_3 - E_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 \cdot I_1 + E_2 \cdot R_3 - E_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2 \cdot I_1 = 0$$

$$I_1 \cdot \left(R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2\right) = E_1 \cdot R_3 - E_2 \cdot R_3 + E_1 \cdot R_2$$

$$I_1 = \frac{E_1 \cdot R_3 - E_2 \cdot R_3 + E_1 \cdot R_2}{R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2}$$

SOLUZIONE NUMERICA

$$\begin{cases} 12 - 4 \cdot I_1 - 20 + 2 \cdot I_2 = 0 \\ 12 - 4 \cdot I_1 + 2 \cdot I_3 = 0 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -8 - 4 \cdot I_1 + 2 \cdot I_2 = 0 \\ 12 - 4 \cdot I_1 + 2 \cdot I_3 = 0 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \cdot I_2 = 8 + 4 \cdot I_1 \\ 2 \cdot I_3 = -12 + 4 \cdot I_1 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_2 = \dfrac{8 + 4 \cdot I_1}{2} = 4 + 2 \cdot I_1 \\ I_3 = \dfrac{-12 + 4 \cdot I_1}{2} = -6 + 2 \cdot I_1 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_2 = 4 + 2 \cdot I_1 \\ I_3 = -6 + 2 \cdot I_1 \\ I_1 + \left(4 + 2 \cdot I_1\right) + \left(-6 + 2 \cdot I_1\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_2 = 4 + 2 \cdot I_1 \\ I_3 = -6 + 2 \cdot I_1 \\ I_1 + 4 + 2 \cdot I_1 - 6 + 2 \cdot I_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_2 = 4 + 2 \cdot I_1 \\ I_3 = -6 + 2 \cdot I_1 \\ 5 \cdot I_1 - 2 = 0 \end{cases}$$

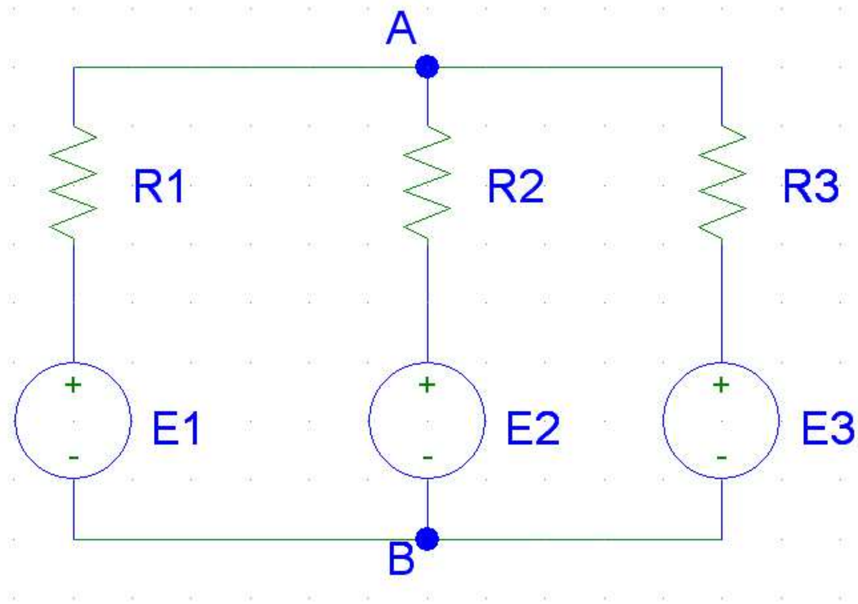
$$\begin{cases} I_2 = 4 + 2 \cdot I_1 \\ I_3 = -6 + 2 \cdot I_1 \\ 5 \cdot I_1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_2 = 4 + 2 \cdot I_1 \\ I_3 = -6 + 2 \cdot I_1 \\ I_1 = \dfrac{2}{5} = 0{,}4A \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_2 = 4 + 2 \cdot 0{,}4 = 4{,}8A \\ I_3 = -6 + 2 \cdot 0{,}4 = 5{,}2A \\ I_1 = 0{,}4A \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = 0{,}4A \\ I_2 = 4{,}8A \\ I_3 = -5{,}2A \end{cases}$$

ESERCIZIO 2
Determinare le correnti che circolano nei tre rami utilizzando i principi di Kirchhoff. Assumere come versi arbitrari per le tre correnti il verso da B verso A.



$E_1 = 12V$

$E_2 = 20V$

$E_3 = 16V$

$R_1 = 4\Omega$

$R_2 = 2\Omega$

$R_3 = 2\Omega$

Occorre scrivere due equazioni di maglia e una equazione di nodo:

$$\begin{cases} E_1 - R_1 \cdot I_1 - E_2 + R_2 \cdot I_2 = 0 \\ E_1 - R_1 \cdot I_1 - E_3 + R_3 \cdot I_3 = 0 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE ANALITICA

Ricavo il valore di I_2 dalla prima equazione e il valore di I_3 dalla seconda in funzione di I_1

$$\begin{cases} R_2 \cdot I_2 = -E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_2 \\ R_3 \cdot I_3 = -E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_3 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_2 = \dfrac{-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_2}{R_2} \\ I_3 = \dfrac{-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_3}{R_3} \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni trovate nella terza si ottiene un'equazione nella sola variabile I_1

$$\begin{cases} I_2 = \dfrac{-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_2}{R_2} \\ I_3 = \dfrac{-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_3}{R_3} \\ I_1 + \dfrac{-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_2}{R_2} + \dfrac{-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_3}{R_3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_2 = \dfrac{-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_2}{R_2} \\ I_3 = \dfrac{-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_3}{R_3} \\ \dfrac{I_1 \cdot R_2 \cdot R_3 + \left(-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_2\right) \cdot R_3 + \left(-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_3\right) \cdot R_2}{R_2 \cdot R_3} = 0 \end{cases}$$

Occorre ora ricercare il valore di I_1, risolvendo l'equazione.

$$I_1 \cdot R_2 \cdot R_3 + \left(-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_2\right) \cdot R_3 + \left(-E_1 + R_1 \cdot I_1 + E_3\right) \cdot R_2 = 0$$

$$I_1 \cdot R_2 \cdot R_3 - E_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 \cdot I_1 + E_2 \cdot R_3 - E_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2 \cdot I_1 + E_3 \cdot R_2 = 0$$

$$I_1 \cdot \left(R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2\right) = E_1 \cdot R_3 - E_2 \cdot R_3 + E_1 \cdot R_2 - E_3 \cdot R_2$$

$$I_1 = \frac{E_1 \cdot R_3 - E_2 \cdot R_3 + E_1 \cdot R_2 - E_3 \cdot R_2}{R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2}$$

SOLUZIONE NUMERICA

$$\begin{cases} 12 - 4 \cdot I_1 - 20 + 2 \cdot I_2 = 0 \\ 12 - 4 \cdot I_1 - 16 + 2 \cdot I_3 = 0 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -8 - 4 \cdot I_1 + 2 \cdot I_2 = 0 \\ -4 - 4 \cdot I_1 + 2 \cdot I_3 = 0 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \cdot I_2 = 8 + 4 \cdot I_1 \\ 2 \cdot I_3 = 4 + 4 \cdot I_1 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

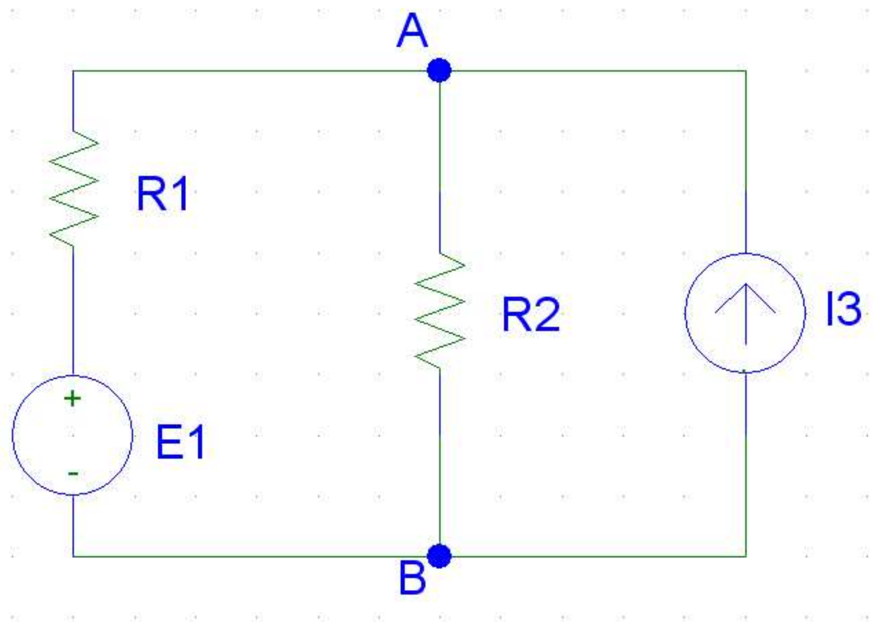
$$\begin{cases} I_2 = \dfrac{8 + 4 \cdot I_1}{2} = 4 + 2 \cdot I_1 \\ I_3 = \dfrac{4 + 4 \cdot I_1}{2} = 2 + 2 \cdot I_1 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_2 = 4 + 2 \cdot I_1 \\ I_3 = 2 + 2 \cdot I_1 \\ I_1 + \left(4 + 2 \cdot I_1\right) + \left(2 + 2 \cdot I_1\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_2 = 4 + 2 \cdot I_1 \\ I_3 = 2 + 2 \cdot I_1 \\ I_1 + 4 + 2 \cdot I_1 + 2 + 2 \cdot I_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_2 = 4 + 2 \cdot I_1 \\ I_3 = 2 + 2 \cdot I_1 \\ 5 \cdot I_1 + 6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_2 = 4 + 2 \cdot I_1 \\ I_3 = 2 + 2 \cdot I_1 \\ 5 \cdot I_1 = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_2 = 4 + 2 \cdot I_1 \\ I_3 = 2 + 2 \cdot I_1 \\ I_1 = -\dfrac{6}{5} = -1{,}2A \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_2 = 4 + 2 \cdot (-1{,}2) = 1{,}6A \\ I_3 = 2 + 2 \cdot (-1{,}2) = -0{,}4A \\ I_1 = -1{,}2A \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = -1{,}2A \\ I_2 = 1{,}6A \\ I_3 = -0{,}4A \end{cases}$$

ESERCIZIO 3

Determinare le correnti che circolano nei due rami e la tensione ai capi del generatore di corrente utilizzando i principi di Kirchhoff.
Assumere il verso della corrente che circola nel ramo 1 quello da B verso A, quello della corrente che circola nel ramo 2 quello da A verso B.



$$E_1 = 12V$$
$$I_3 = 5A$$
$$R_1 = 4\Omega$$
$$R_2 = 2\Omega$$

Occorre scrivere due equazioni di maglia e una equazione di nodo:

$$\begin{cases} E_1 - R_1 \cdot I_1 - V_{AB} = 0 \\ R_2 \cdot I_2 - V_{AB} = 0 \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE ANALITICA

Ricavo il valore di I_1 dalla prima equazione e il valore di I_2 dalla seconda in funzione di I_1

$$\begin{cases} E_1 - V_{AB} = R_1 \cdot I_1 \\ R_2 \cdot I_2 = V_{AB} \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{E_1 - V_{AB}}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{V_{AB}}{R_2} \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni trovate nella terza si ottiene un'equazione nella sola variabile I_1

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{E_1 - V_{AB}}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{V_{AB}}{R_2} \\ \dfrac{E_1 - V_{AB}}{R_1} - \dfrac{V_{AB}}{R_2} + I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{E_1 - V_{AB}}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{V_{AB}}{R_2} \\ (E_1 - V_{AB}) \cdot R_2 - V_{AB} \cdot R_1 + I_3 \cdot R_1 \cdot R_2 = 0 \end{cases}$$

Occorre ora ricercare il valore di V_{AB}, risolvendo l'equazione.

$$(E_1 - V_{AB}) \cdot R_2 - V_{AB} \cdot R_1 + I_3 \cdot R_1 \cdot R_2 = 0$$

$$E_1 \cdot R_2 - V_{AB} \cdot R_2 - V_{AB} \cdot R_1 + I_3 \cdot R_1 \cdot R_2 = 0$$

$$E_1 \cdot R_2 - V_{AB} \cdot (R_1 + R_2) + I_3 \cdot R_1 \cdot R_2 = 0$$

$$V_{AB} \cdot (R_1 + R_2) = E_1 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_1 \cdot R_2$$

$$V_{AB} = \frac{E_1 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

SOLUZIONE NUMERICA

$$\begin{cases} 12 - 4 \cdot I_1 - V_{AB} = 0 \\ 2 \cdot I_2 - V_{AB} = 0 \\ I_1 - I_2 + 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4 \cdot I_1 = V_{AB} - 12 \\ 2 \cdot I_2 = V_{AB} \\ I_1 - I_2 + 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = \dfrac{V_{AB} - 12}{-4} \\ I_2 = \dfrac{V_{AB}}{2} \\ I_1 - I_2 + 5 = 0 \end{cases}$$

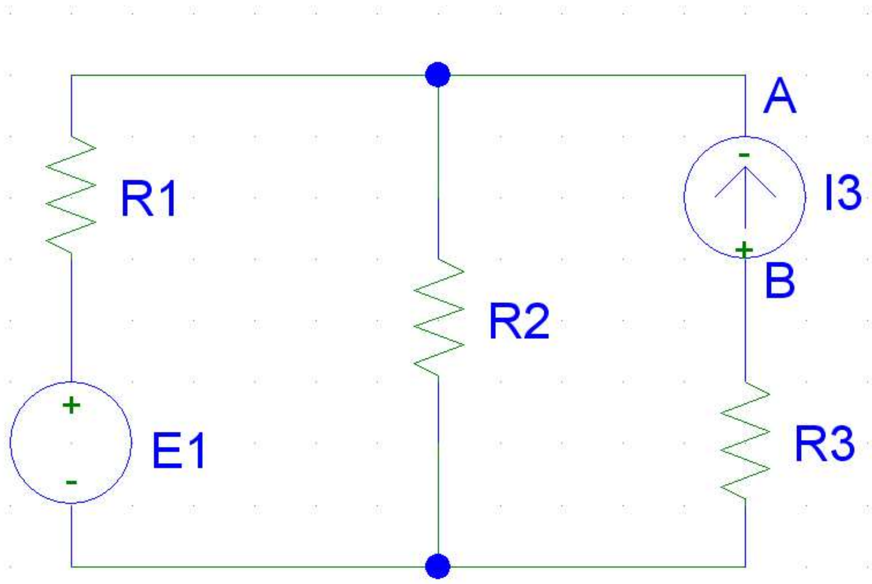
$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{12 - V_{AB}}{4} \\ I_2 = \dfrac{V_{AB}}{2} \\ I_1 - I_2 + 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = \dfrac{12 - V_{AB}}{4} \\ I_2 = \dfrac{V_{AB}}{2} \\ \dfrac{12 - V_{AB}}{4} - \dfrac{V_{AB}}{2} + 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = 3 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_2 = 0{,}5 \cdot V_{AB} \\ 3 - 0{,}25 \cdot V_{AB} - 0{,}5 \cdot V_{AB} + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = 3 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_2 = 0{,}5 \cdot V_{AB} \\ -0{,}75 \cdot V_{AB} + 8 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = 3 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_2 = 0{,}5 \cdot V_{AB} \\ -0{,}75 \cdot V_{AB} = -8 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = 3 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_2 = 0{,}5 \cdot V_{AB} \\ V_{AB} = \dfrac{-8}{-0{,}75} = 10{,}67V \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = 3 - 0{,}25 \cdot 10{,}67 \\ I_2 = 0{,}5 \cdot 10{,}67 \\ V_{AB} = \dfrac{-8}{-0{,}75} = 10{,}67V \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = 0{,}33A \\ I_2 = 5{,}33 \\ V_{AB} = 10{,}67V \end{cases}$$

ESERCIZIO 4

Determinare le correnti che circolano nei due rami e la tensione ai capi del generatore di corrente utilizzando i principi di Kirchhoff.
Assumere il verso della corrente che circola nel ramo 1 quello da B verso A, quello della corrente che circola nel ramo 2 quello da A verso B.



$E_1 = 12V$

$I_3 = 5A$

$R_1 = 4\Omega$

$R_2 = 2\Omega$

$R_3 = 1\Omega$

Occorre scrivere due equazioni di maglia e una equazione di nodo:

$$\begin{cases} E_1 - R_1 \cdot I_1 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3 = 0 \\ R_2 \cdot I_2 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3 = 0 \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE ANALITICA

Ricavo il valore di I_1 dalla prima equazione e il valore di I_2 dalla seconda in funzione di I_1

$$\begin{cases} E_1 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3 = R_1 \cdot I_1 \\ R_2 \cdot I_2 = V_{AB} - R_3 \cdot I_3 \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{E_1 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{V_{AB} - R_3 \cdot I_3}{R_2} \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni trovate nella terza si ottiene un'equazione nella sola variabile I_1

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{E_1 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{V_{AB} - R_3 \cdot I_3}{R_2} \\ \dfrac{E_1 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3}{R_1} - \dfrac{V_{AB} - R_3 \cdot I_3}{R_2} + I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{E_1 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{V_{AB} - R_3 \cdot I_3}{R_2} \\ (E_1 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3) \cdot R_2 - V_{AB} \cdot R_1 + \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot I_3 + I_3 \cdot R_1 \cdot R_2 = 0 \end{cases}$$

Occorre ora ricercare il valore di V_{AB}, risolvendo l'equazione.

$$(E_1 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3) \cdot R_2 - V_{AB} \cdot R_1 + \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot I_3 + I_3 \cdot R_1 \cdot R_2 = 0$$

$$E_1 \cdot R_2 - V_{AB} \cdot R_2 + R_3 \cdot R_2 \cdot I_3 - V_{AB} \cdot R_1 + \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot I_3 + I_3 \cdot R_1 \cdot R_2 = 0$$

$$E_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot R_2 \cdot I_3 - V_{AB} \cdot (R_1 + R_2) + \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot I_3 + I_3 \cdot R_1 \cdot R_2 = 0$$

$$V_{AB} \cdot (R_1 + R_2) = E_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot R_2 \cdot I_3 + \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot I_3 + I_3 \cdot R_1 \cdot R_2$$

$$V_{AB} = \frac{E_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot R_2 \cdot I_3 + \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot I_3 + I_3 \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

SOLUZIONE NUMERICA

$$\begin{cases} 12 - 4 \cdot I_1 - V_{AB} + 1 \cdot 5 = 0 \\ 2 \cdot I_2 - V_{AB} + 1 \cdot 5 = 0 \\ I_1 - I_2 + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4 \cdot I_1 = V_{AB} - 17 \\ 2 \cdot I_2 = V_{AB} - 5 \\ I_1 - I_2 + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = \dfrac{V_{AB} - 17}{-4} \\ I_2 = \dfrac{V_{AB} - 5}{2} \\ I_1 - I_2 + 5 = 0 \end{cases}$$

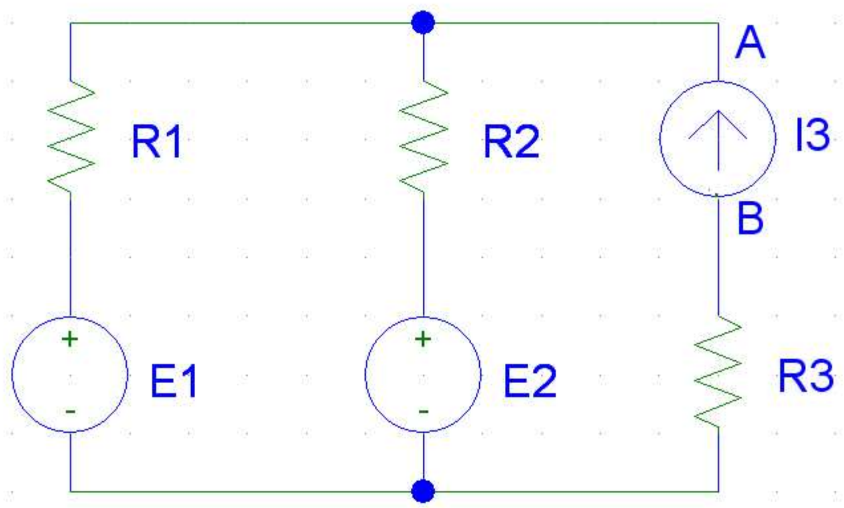
$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{17 - V_{AB}}{4} \\ I_2 = \dfrac{V_{AB} - 5}{2} \\ I_1 - I_2 + 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = \dfrac{17 - V_{AB}}{4} \\ I_2 = \dfrac{V_{AB} - 5}{2} \\ \dfrac{17 - V_{AB}}{4} - \dfrac{V_{AB} - 5}{2} + 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = 4{,}25 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_2 = 0{,}5 \cdot V_{AB} - 2{,}5 \\ 4{,}25 - 0{,}25 \cdot V_{AB} - 0{,}5 \cdot V_{AB} + 2{,}5 + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = 4{,}25 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_2 = 0{,}5 \cdot V_{AB} - 2{,}5 \\ 11{,}75 - 0{,}75 \cdot V_{AB} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = 4{,}25 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_2 = 0{,}5 \cdot V_{AB} - 2{,}5 \\ 0{,}75 \cdot V_{AB} = 11{,}75 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = 4{,}25 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_2 = 0{,}5 \cdot V_{AB} - 2{,}5 \\ V_{AB} = \dfrac{11{,}75}{0{,}75} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = 4{,}25 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_2 = 0{,}5 \cdot V_{AB} - 2{,}5 \\ V_{AB} = 15{,}67V \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = 4{,}25 - 0{,}25 \cdot 15{,}67 \\ I_2 = 0{,}5 \cdot 15{,}67 - 2{,}5 \\ V_{AB} = 15{,}67V \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = 4{,}25 - 0{,}25 \cdot 15{,}67 = 0{,}33A \\ I_2 = 5{,}33A \\ V_{AB} = 15{,}67V \end{cases}$$

ESERCIZIO 5

Determinare le correnti che circolano nei due rami e la tensione ai capi del generatore di corrente utilizzando i principi di Kirchhoff.
Assumere come versi arbitrari per le tre correnti il verso da B verso A.



$E_1 = 12V$

$E_2 = 8V$

$I_3 = 5A$

$R_1 = 4\Omega$

$R_2 = 2\Omega$

$R_3 = 1\Omega$

Occorre scrivere due equazioni di maglia e una equazione di nodo:

$$\begin{cases} E_1 - R_1 \cdot I_1 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3 = 0 \\ E_2 - R_2 \cdot I_2 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3 = 0 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE ANALITICA

Ricavo il valore di I_1 dalla prima equazione e il valore di I_2 dalla seconda in funzione di I_1

$$\begin{cases} R_1 \cdot I_1 = E_1 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3 \\ R_2 \cdot I_2 = E_2 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3 \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{E_1 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{E_2 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3}{R_2} \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni trovate nella terza si ottiene un'equazione nella sola variabile I_1

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{E_1 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{E_2 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3}{R_2} \\ \dfrac{E_1 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3}{R_1} + \dfrac{E_2 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3}{R_2} + I_3 = 0 \end{cases}$$

Occorre ora ricercare il valore di V_{AB}, risolvendo l'equazione.

$$\frac{E_1 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3}{R_1} + \frac{E_2 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3}{R_2} + I_3 = 0$$

$$(E_1 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3) \cdot R_2 + (E_2 - V_{AB} + R_3 \cdot I_3) \cdot R_1 + I_3 \cdot R_1 \cdot R_2 = 0$$

$$E_1 \cdot R_2 - V_{AB} \cdot R_2 + R_3 \cdot R_2 \cdot I_3 + E_2 \cdot R_1 - V_{AB} \cdot R_1 + R_3 \cdot R_1 \cdot I_3 + I_3 \cdot R_1 \cdot R_2 = 0$$

$$E_1 \cdot R_2 - V_{AB} \cdot (R_1 + R_2) + E_2 \cdot R_1 + I_3 \cdot (R_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot R_1 + R_3 \cdot R_2) = 0$$

$$V_{AB} \cdot (R_1 + R_2) = E_1 \cdot R_2 + E_2 \cdot R_1 + I_3 \cdot (R_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot R_1 + R_3 \cdot R_2)$$

$$V_{AB} = \frac{E_1 \cdot R_2 + E_2 \cdot R_1 + I_3 \cdot (R_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot R_1 + R_3 \cdot R_2)}{R_1 + R_2}$$

SOLUZIONE NUMERICA

$$\begin{cases} 12 - 4 \cdot I_1 - V_{AB} + 1 \cdot 5 = 0 \\ 8 - 2 \cdot I_2 - V_{AB} + 1 \cdot 5 = 0 \\ I_1 + I_2 + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4 \cdot I_1 = V_{AB} - 17 \\ -2 \cdot I_2 = V_{AB} - 13 \\ I_1 + I_2 + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = \dfrac{V_{AB} - 17}{-4} \\ I_2 = \dfrac{V_{AB} - 13}{-2} \\ I_1 + I_2 + 5 = 0 \end{cases}$$

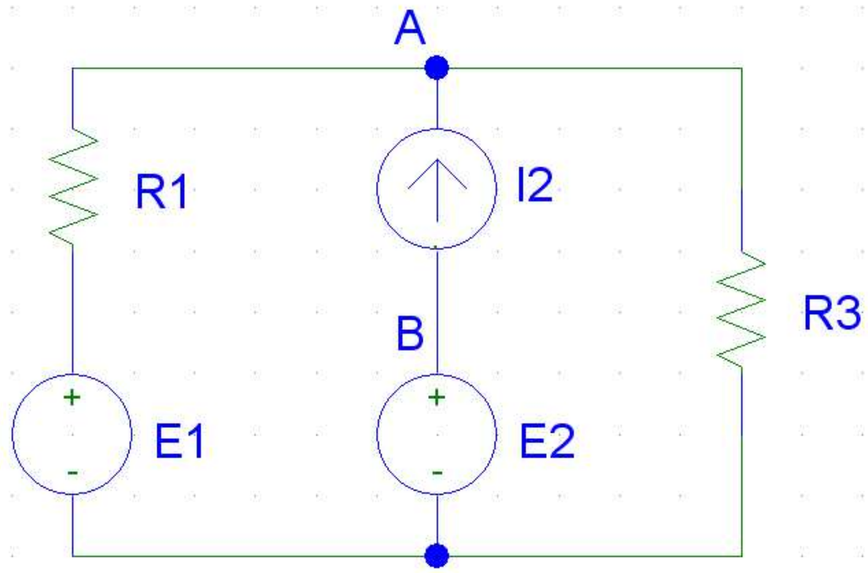
$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{17 - V_{AB}}{4} \\ I_2 = \dfrac{13 - V_{AB}}{2} \\ I_1 + I_2 + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = \dfrac{17 - V_{AB}}{4} \\ I_2 = \dfrac{13 - V_{AB}}{2} \\ \dfrac{17 - V_{AB}}{4} + \dfrac{13 - V_{AB}}{2} + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = 4{,}25 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_2 = 6{,}5 - 0{,}5 \cdot V_{AB} \\ 4{,}25 - 0{,}25 \cdot V_{AB} + 6{,}5 - 0{,}5 \cdot V_{AB} + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = 4{,}25 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_2 = 6{,}5 - 0{,}5 \cdot V_{AB} \\ 15{,}75 - 0{,}75 \cdot V_{AB} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = 4{,}25 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_2 = 6{,}5 - 0{,}5 \cdot V_{AB} \\ 0{,}75 \cdot V_{AB} = 15{,}75 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = 4{,}25 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_2 = 6{,}5 - 0{,}5 \cdot V_{AB} \\ V_{AB} = \dfrac{15{,}75}{0{,}75} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = 4{,}25 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_2 = 6{,}5 - 0{,}5 \cdot V_{AB} \\ V_{AB} = 21V \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = 4{,}25 - 0{,}25 \cdot 21 \\ I_2 = 6{,}5 - 0{,}5 \cdot 21 \\ V_{AB} = 21V \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = -1A \\ I_2 = -4A \\ V_{AB} = 21V \end{cases}$$

ESERCIZIO 6

Determinare le correnti che circolano nei due rami e la tensione ai capi del generatore di corrente utilizzando i principi di Kirchhoff.
Assumere il verso della corrente che circola nel ramo 1 quello da B verso A, quello della corrente che circola nel ramo 3 quello da A verso B.



$E_1 = 12V$

$E_2 = 8V$

$I_2 = 5A$

$R_1 = 4\Omega$

$R_3 = 1\Omega$

Occorre scrivere due equazioni di maglia e una equazione di nodo:

$$\begin{cases} E_1 - R_1 \cdot I_1 - V_{AB} - E_2 = 0 \\ R_3 \cdot I_3 - V_{AB} - E_2 = 0 \\ I_1 + I_2 - I_3 = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE ANALITICA

Ricavo il valore di I_1 dalla prima equazione e il valore di I_3 dalla seconda in funzione di I_1

$$\begin{cases} R_1 \cdot I_1 = E_1 - V_{AB} - E_2 \\ R_3 \cdot I_3 = V_{AB} + E_2 \\ I_1 + I_2 - I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{E_1 - V_{AB} - E_2}{R_1} \\ I_3 = \dfrac{V_{AB} + E_2}{R_3} \\ I_1 + I_2 - I_3 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni trovate nella terza si ottiene un'equazione nella sola variabile I_1

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{E_1 - V_{AB} - E_2}{R_1} \\ I_3 = \dfrac{V_{AB} + E_2}{R_3} \\ \dfrac{E_1 - V_{AB} - E_2}{R_1} + I_2 - \dfrac{V_{AB} + E_2}{R_3} = 0 \end{cases}$$

Occorre ora ricercare il valore di V_{AB}, risolvendo l'equazione.

$$\frac{E_1 - V_{AB} - E_2}{R_1} + I_2 - \frac{V_{AB} + E_2}{R_3} = 0$$

$$(E_1 - V_{AB} - E_2) \cdot R_3 + I_2 \cdot R_1 \cdot R_3 - (V_{AB} + E_2) \cdot R_1 = 0$$

$$E_1 \cdot R_3 - V_{AB} \cdot R_3 - E_2 \cdot R_3 + I_2 \cdot R_1 \cdot R_3 - V_{AB} \cdot R_1 - E_2 \cdot R_1 = 0$$

$$E_1 \cdot R_3 - V_{AB} \cdot (R_1 + R_3) - E_2 \cdot R_3 + I_2 \cdot R_1 \cdot R_3 - E_2 \cdot R_1 = 0$$

$$V_{AB} \cdot (R_1 + R_3) = E_1 \cdot R_3 - E_2 \cdot R_3 + I_2 \cdot R_1 \cdot R_3 - E_2 \cdot R_1$$

$$V_{AB} = \frac{E_1 \cdot R_3 - E_2 \cdot R_3 + I_2 \cdot R_1 \cdot R_3 - E_2 \cdot R_1}{R_1 + R_3}$$

$$V_{AB} = \frac{E_1 \cdot R_3 - E_2 \cdot (R_1 + R_3) + I_2 \cdot R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}$$

SOLUZIONE NUMERICA

$$\begin{cases} 12 - 4 \cdot I_1 - V_{AB} - 8 = 0 \\ 1 \cdot I_3 - V_{AB} - 8 = 0 \\ I_1 + 5 - I_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4 \cdot I_1 - V_{AB} + 4 = 0 \\ I_3 - V_{AB} - 8 = 0 \\ I_1 + 5 - I_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4 \cdot I_1 = V_{AB} - 4 \\ I_3 = V_{AB} + 8 \\ I_1 + 5 - I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{V_{AB} - 4}{-4} \\ I_3 = V_{AB} + 8 \\ I_1 + 5 - I_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = 1 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_3 = V_{AB} + 8 \\ I_1 + 5 - I_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = 1 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_3 = V_{AB} + 8 \\ 1 - 0{,}25 \cdot V_{AB} + 5 - (V_{AB} + 8) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = 1 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_3 = V_{AB} + 8 \\ 1 - 0{,}25 \cdot V_{AB} + 5 - V_{AB} - 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = 1 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_3 = V_{AB} + 8 \\ -1{,}25 \cdot V_{AB} - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = 1 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_3 = V_{AB} + 8 \\ -1{,}25 \cdot V_{AB} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = 1 - 0{,}25 \cdot V_{AB} \\ I_3 = V_{AB} + 8 \\ V_{AB} = \dfrac{2}{-1{,}25} \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = 1 - 0{,}25 \cdot (-1{,}6) \\ I_3 = (-1{,}6) + 8 \\ V_{AB} = -1{,}6V \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 = 1{,}4A \\ I_2 = 6{,}4A \\ V_{AB} = -1{,}6V \rightarrow V_{BA} = +1{,}6V \end{cases}$$